
Integrais Múltiplos

Transparências de apoio à leccionação de aulas teóricas

Slide 1

Versão 2

©2000, 1998

Maria Antónia Carravilla – FEUP

Integrais Duplos

Generalização do conceito de integral a subconjuntos limitados de \mathbb{R}^2 .

Seja:

$$\begin{array}{ll} A \subset \mathbb{R}^2 & \text{limitado} \\ f : A \rightarrow \mathbb{R} & \text{função limitada, } f(x, y) \geq 0 \\ S = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 & \text{tal que } A \subset S. \end{array}$$

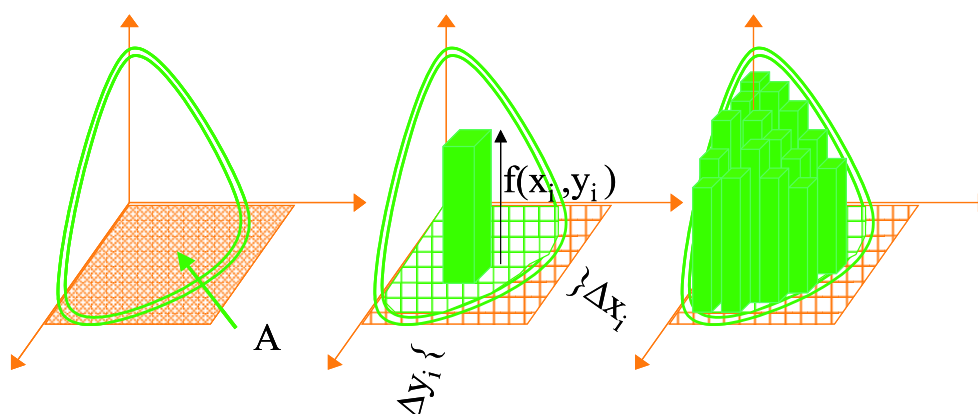
Slide 2

Nova função:

$$g : S \rightarrow \mathbb{R} \begin{cases} \text{se } (x, y) \in A, & g(x, y) = f(x, y) \\ \text{se } (x, y) \in S \setminus A, & g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Integrais Duplos

Slide 3



Integrais Duplos

Seja P uma partição de S :

$$P = \{(x_0, y_0), (x_0, y_1), \dots, (x_0, y_m), \dots, (x_n, y_0), \dots, (x_n, y_m)\}$$

tal que

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

Slide 4

Integrais Duplos

Seja

$$M_{ji} = \sup \{g(x, y) : x_{j-1} \leq x \leq x_j, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$

$$m_{ji} = \inf \{g(x, y) : x_{j-1} \leq x \leq x_j, y_{i-1} \leq y \leq y_i\}$$

Assim, as somas superior e inferior relativamente à partição P são:

Slide 5 Soma superior $U(f, P) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m M_{ji}(x_j - x_{j-1})(y_i - y_{i-1})$

Soma inferior $L(f, P) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m m_{ji}(x_j - x_{j-1})(y_i - y_{i-1})$

Dado que:

$$m_{ji} \leq M_{ji} \quad \forall j=1, \dots, n \quad \forall i=1, \dots, m$$

Para qualquer partição P de S :

$$L(f, P) \leq U(f, P)$$

Integrais Duplos

Seja agora P_1 um refinamento de P (qualquer subrectângulo definido por P_1 está contido num subrectângulo definido por P)

Então:

$$L(f, P) \leq L(f, P_1) \leq U(f, P_1) \leq U(f, P)$$

Como f é limitada:

Slide 6

$\mathcal{L} = \{L(f, P) : P \text{ partição de } S\}$ é um conjunto limitado superiormente
supremo representa-se como: $\sup \mathcal{L} = \underline{I}(f) = \int_{\underline{A}} f$ (Integral inferior de f)

$\mathcal{U} = \{U(f, P) : P \text{ partição de } S\}$ é um conjunto limitado inferiormente
ínfimo representa-se como: $\inf \mathcal{U} = \overline{I}(f) = \int_A^- f$ (Integral superior de f)

$$\underline{I}(f) = \int_{\underline{A}} f \leq \int_A^- f = \overline{I}(f)$$

Integrais Duplos - Definição

$A \subset \mathbb{R}^2$ limitado

$f : A \rightarrow \mathbb{R}$ função limitada,

f diz-se função integrável (segundo Riemann) se:

Slide 7

$$\int_{\underline{A}} f = \int_A^- f$$

O integral de f em A representa-se por:

$$\int_{\underline{A}} f = \int_A^- f = \int_A f = \int \int_A f(x, y) dx dy$$

Integrais Duplos - Teorema de Fubini

Suponha que:

- $S = [a, b] \times [c, d]$, $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$ é integrável
- $\forall_{x \in [a, b]}$ a função $f^x : [c, d] \rightarrow \mathfrak{R}$ definida por $f^x(y) = f(x, y)$ é integrável (existe $\int_c^d f^x(y) dy$)

Slide 8

Então:

$$\int \int_S f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

A este processo chama-se integração iterada.

Integrais Duplos - Exemplo

Calcule os seguinte integral:

$$\int \int_S f(x, y) dx dy \text{ onde :}$$

$$f(x, y) = \sin(x + y)$$

$$S = [0, \pi] \times \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Slide 9

Integrais Duplos - Conjuntos de medida nula

Definição: Seja $A \subset \mathbb{R}^2$. A diz-se um conjunto de medida nula se, para todo o $\epsilon \geq 0$ é possível definir uma família numerável de rectângulos $(S_i)_{i \geq 1}$ tais que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \text{ e } \sum_{i=1}^{\infty} \text{área } S_i < \epsilon$$

Slide 10

a

^aNão é possível determinar um escalar positivo que represente a área de A (A não tem área em \mathbb{R}^2)

Integrais Duplos - Conjuntos de medida nula

- Se A é um conjunto finito de pontos isolados em \mathbb{R}^2 então é um conjunto de medida nula
- Em \mathbb{R}^2 qualquer recta tem medida nula
- Seja $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então
 $Gra \ \phi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = \phi(x)\}$ tem medida nula.

Slide 11

Teorema:

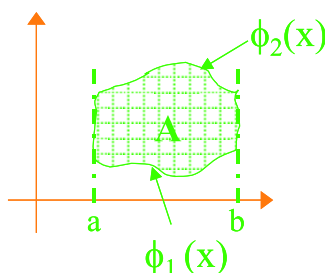
Seja $S = [a, b] \times [c, d]$ e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ limitada.

f é integrável se e só se o conjunto de pontos de descontinuidade de f em S for um conjunto de medida nula.

Integrais Duplos - Teorema (i)

Seja:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$



Slide 12

Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e contínua no interior de A .

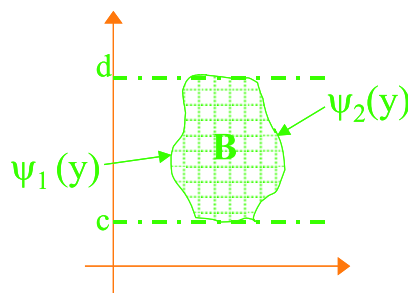
Então f é integrável em A e:

$$\int \int_A f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Integrais Duplos - Teorema (ii)

Seja:

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$



Slide 13

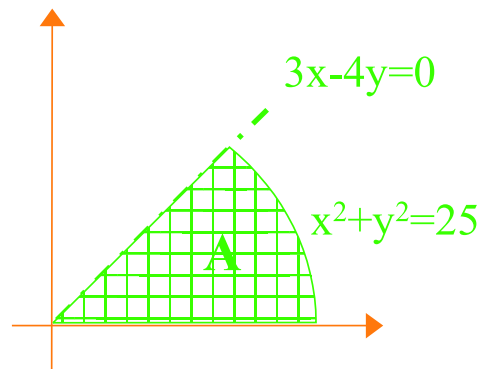
Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ limitada e contínua no interior de B .

Então f é integrável em A e:

$$\int \int_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Integrais Duplos - Exemplo

Slide 14



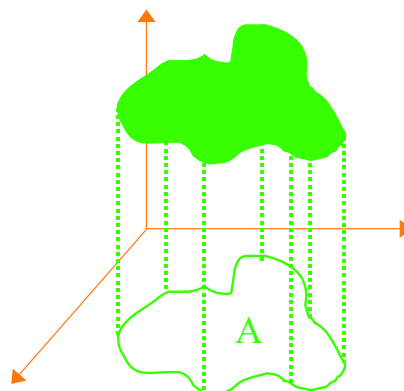
$$\int \int_A f(x, y) dx dy$$

Integrais Duplos

Representação geométrica de $\int \int_A f(x, y) dx dy$

- $f(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in A$
- $f(x, y) = 1$

Slide 15



Integrais Duplos - Mudanças de variável

Teorema:

Sejam D^* e D subconjuntos de \mathbb{R}^2 .

Seja

$$\begin{aligned} F : D^* &\rightarrow D \\ (u, v) &\rightsquigarrow (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

Slide 16

Uma função de classe C_1 e bijetiva. Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

Então:

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

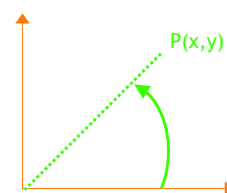
Observação: $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ é o determinante da matriz Jacobiana de F

Integrais Duplos - Mudanças de variável

Coordenadas Polares:

Considere-se a função:

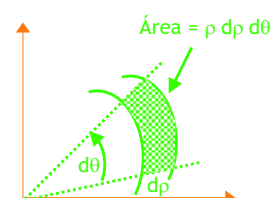
$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[&\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\rho, \theta) &\rightsquigarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{aligned}$$



Slide 17

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} \right| = \det \mathcal{J}F(\rho, \theta) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{bmatrix} = \rho$$

$$\int \int_D f(x, y) dx dy = \int \int_{D^*} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$$



Integrais Duplos - Mudanças de variável - Exemplo

Calcular:

$$\int \int_A \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$

$$\text{onde: } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$$

em coordenadas polares.

Slide 18

1. Determinar a variação máxima de θ
2. Fixar $\theta = \text{const.}$ Como varia ρ com θ ?

Troque agora a ordem de integração...

Integrais Duplos - Mudanças de variável - Exemplo

Calcular:

$$\int \int_T f(x, y) dx dy$$

$$\text{onde: } T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], -x \leq y \leq x\}$$

$$\cup$$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2], x - 2 \leq y \leq 2 - x\}$$

Slide 19

usando a mudança de variável: $u = y + x$ e $v = y - x$.

Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies

Problema:

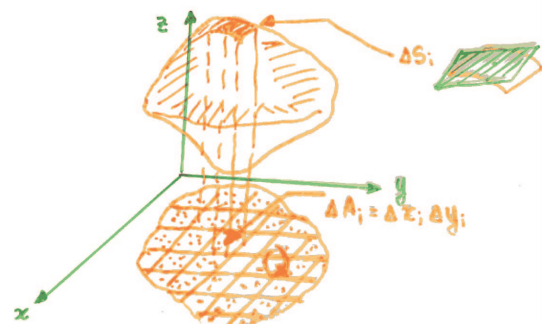
Dada uma região $Q \subset \mathbb{R}^2$ e uma função $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, pretende-se calcular a área da superfície $z = f(x, y)$. Isto é, pretende-se calcular a área de :

$$\text{Graf} = \{(x, y, z) : (x, y) \in Q, z = f(x, y)\}$$

Slide 20

Definindo $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $F(x, y, z) = f(x, y) - z$, tem-se:

$$S = \text{Graf} = S_F(0) = \{(x, y, z) : (x, y) \in Q, F(x, y, z) = 0\}$$

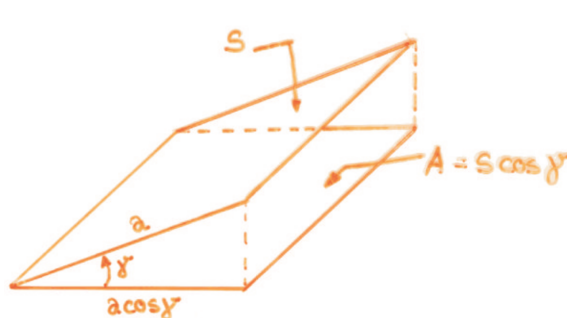


Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies

$$dS \cos \gamma = dA \Leftrightarrow dS = \frac{dA}{\cos \gamma}$$

$$S = \iint dS = \iint_Q \frac{dA}{\cos \gamma}$$

Slide 21



Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies

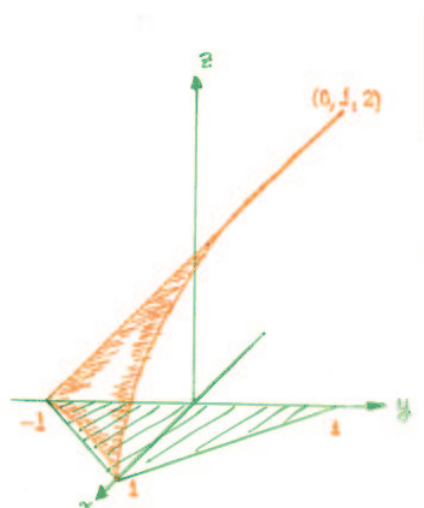
$$\cos \gamma = \frac{|\nabla F(x_i, y_i, z_i) \cdot (0, 0, 1)|}{\|\nabla F(x_i, y_i, z_i)\| \|(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1}}$$

$$S = \int \int_Q \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\right)^2 + 1} dA$$

Slide 22

Integrais Duplos - Cálculo de áreas de superfícies - Exemplo (Larson)

Calcular a área da superfície $f(x, y) = 1 - x^2 + y$ que se encontra por cima da região triangular de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$ e $(0, 1, 0)$, tal como se representa na figura.



Slide 23

Integrais Triplos

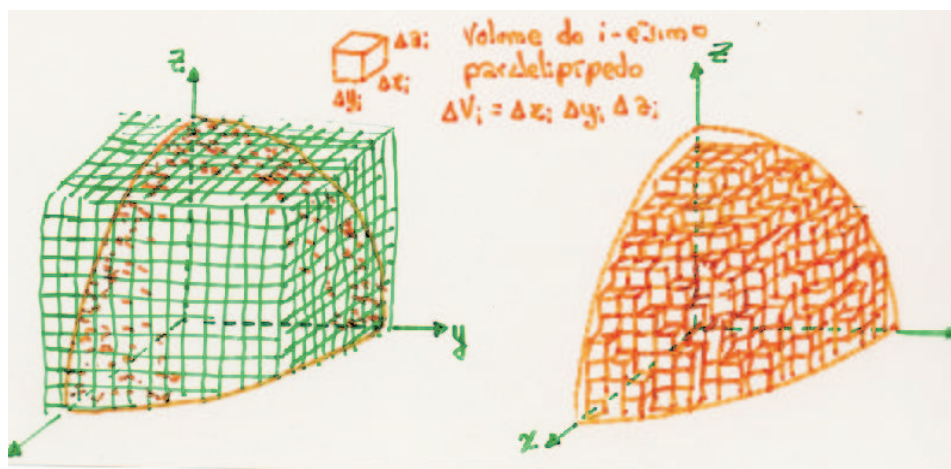
Seja:

$Q \subset \mathbb{R}^3$ limitado

$f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ função limitada,

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

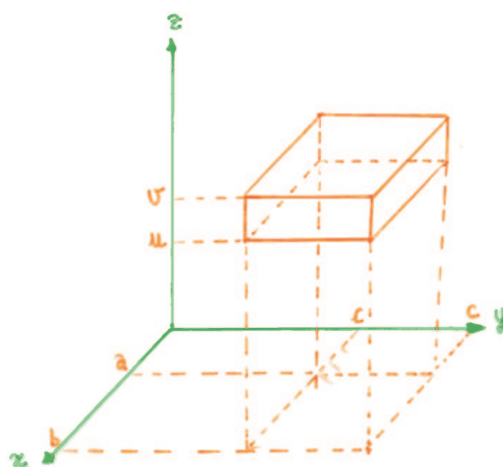
Slide 24



Integrais Triplos - Teorema de Fubini

$$\int_B f(x, y, z) dV = \int_a^b \int_c^d \int_u^v f(x, y, z) dz dy dx$$

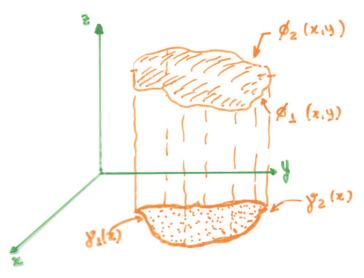
Slide 25



Integrais Triplos

$$\begin{aligned}\int_W f(x, y, z) dV &= \int \int_D \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\gamma_1(x)}^{\gamma_2(x)} \left(\int_{\phi_1(x, y)}^{\phi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx\end{aligned}$$

Slide 26

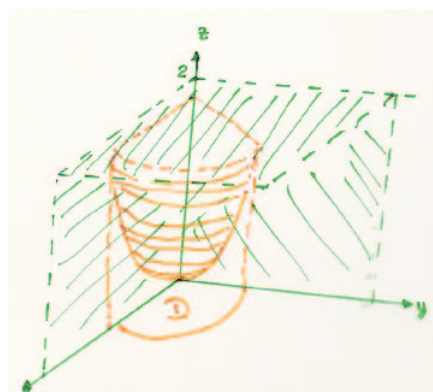


Integrais Triplos - Exemplo

Seja W uma região limitada pelos planos $x = 0, y = 0, z = 2$ e o parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ e $x \geq 0, y \geq 0$. Calcular:

$$\int_W x dx dy dz$$

Slide 27



Integrais Triplos - Exemplo

Cálculo de Volumes:

Determinar o volume do sólido limitado pelo elipsóide de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Slide 28

Integrais Triplos - Mudanças de variável

Teorema:

Sejam B^* e B subconjuntos de \mathbb{R}^3 .

Seja

$$\begin{aligned} F : B^* &\rightarrow B \\ (u, v, w) &\mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \end{aligned}$$

Slide 29

Uma função de classe C_1 e bijectiva. Seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável.

Então:

$$\begin{aligned} \int \int \int_B f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int \int \int_{B^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \end{aligned}$$

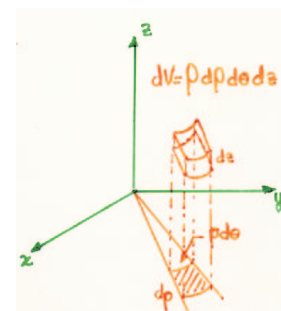
Observação: $\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$ é o determinante da matriz Jacobiana de F

Integrais Triplos - Mudanças de variável - Coordenadas Cilíndricas:

Considere-se a função:

$$F : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\rho, \theta, z) \rightsquigarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z)$$



Slide 30

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} \right| = \det \mathcal{J}F(\rho, \theta, z) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \rho$$

$$\int \int \int_B f(x, y, z) dx \, dy \, dz = \int \int \int_{B^*} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho \, d\rho \, d\theta \, dz$$

Integrais Triplos - Coordenadas Cilíndricas - Exemplo (Larson)

Calcular o volume da região sólida que o cilindro de equação

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

retira da esfera de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2^2$$

Slide 31

Integrais Triplos - Coordenadas Cilíndricas - Exemplo (Larson)

Calcular a massa do elipsóide de equação

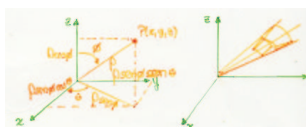
$$4x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 16$$

sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional à distância entre o ponto e o plano xy .

Slide 32

Integrais Triplos - Mudanças de variável - Coordenadas Esféricas:

Considere-se a função:



$$F : \mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\rho, \theta, \phi) \rightsquigarrow (\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$$

Slide 33

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| &= \det \mathcal{J}F(\rho, \theta, \phi) = \det \begin{bmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{bmatrix} \\ &= \rho^2 \sin \phi \\ \int \int \int_B f(x, y, z) dx \, dy \, dz &= \\ \int \int \int_{B^*} f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi \end{aligned}$$

Integrais Triplos - Coordenadas Esféricas - Exemplo (Larson)

Calcular o volume da região sólida Q limitada inferiormente pela parte superior do cone

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e superiormente pela esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Slide 34